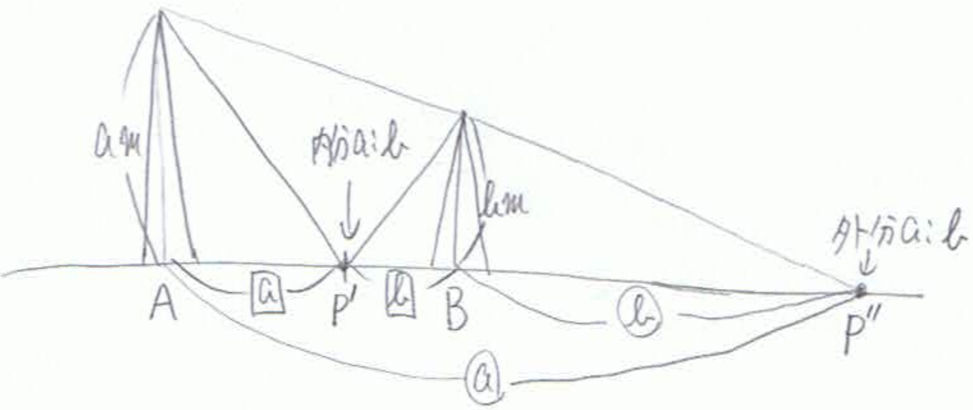
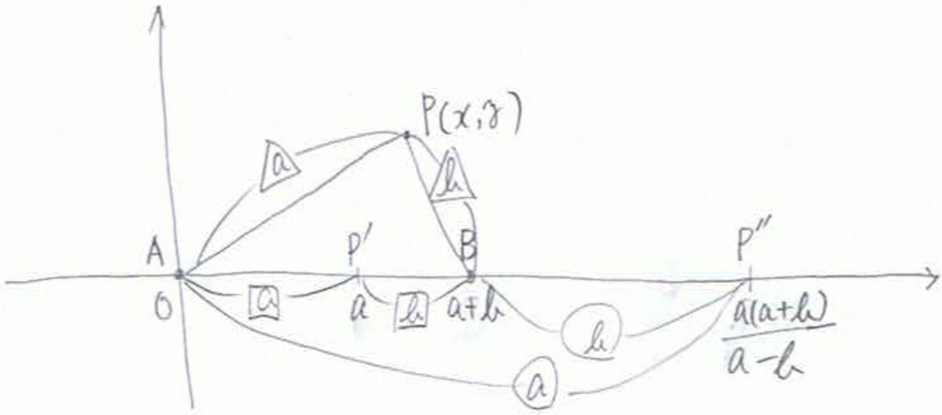
どんな高さでも成立する証明

タワーの高さが、am と bm（但し、a>b とする）の場合（自宅でフリーハンドなので乱筆失礼）





PA : PB = a : b より

$bPA = aPB$

$b^2PA^2 = a^2PB^2$ …③

A(0,0), B(a+b, 0), P(x, y) とすると、

$PA = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$ …①

$PB = \sqrt{\{x-(a+b)\}^2+(y-0)^2} = \sqrt{\{x-(a+b)\}^2+y^2}$ …②

①, ② を ③ に代入

$b^2(x^2+y^2) = a^2[\{x-(a+b)\}^2+y^2]$

$b^2x^2+b^2y^2 = a^2\{x^2-2(a+b)x+(a+b)^2+y^2\}$

$b^2x^2+b^2y^2 = a^2x^2-2a^2(a+b)x+a^2(a+b)^2+ay^2$

$0 = (a^2-b^2)x^2-2a^2(a+b)x+a^2(a+b)^2+(a^2-b^2)y^2$

$0 = \cancel{(a+b)}(a-b)x^2-2a^2\cancel{(a+b)}x+a^2(a+b)^{\cancel{2}}+\cancel{(a+b)}(a-b)y^2$

$0 = (a-b)x^2-2a^2x+a^2(a+b)+(a-b)y^2$

$0 = x^2-2\dfrac{a^2}{a-b}x+\dfrac{a^2(a+b)}{a-b}+y^2$

$0 = \left(x-\dfrac{a^2}{a-b}\right)^2-\dfrac{a^4}{(a-b)^2}+\dfrac{a^2(a+b)}{a-b}+y^2$

$$0=\left(x-\frac{a^2}{a-b}\right)^2+y^2-\frac{a^4}{(a-b)^2}+\frac{a^2(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}$$

$$0=\left(x-\frac{a^2}{a-b}\right)^2+y^2-\frac{a^4}{(a-b)^2}+\frac{a^2(a^2-b^2)}{(a-b)^2}$$

$$0=\left(x-\frac{a^2}{a-b}\right)^2+y^2+\frac{\cancel{a^4}-a^2b^2\cancel{-a^4}}{(a-b)^2}$$

$$\frac{a^2b^2}{(a-b)^2}=\left(x-\frac{a^2}{a-b}\right)^2+y^2$$ となる。

よって、$\left(\frac{a^2}{a-b},0\right)$が中心、半径$\frac{ab}{a-b}$の円となる。

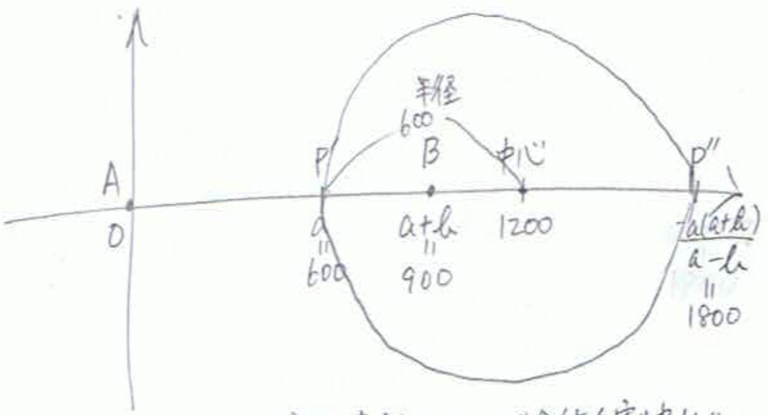
分母
$a-b\neq0$でさえ
確かなら円になる。
$a>b$と宣言している
ので$a-b>0$と
なり問題なし。

補足、

例えば、$a=600m$, $b=300m$ならば、

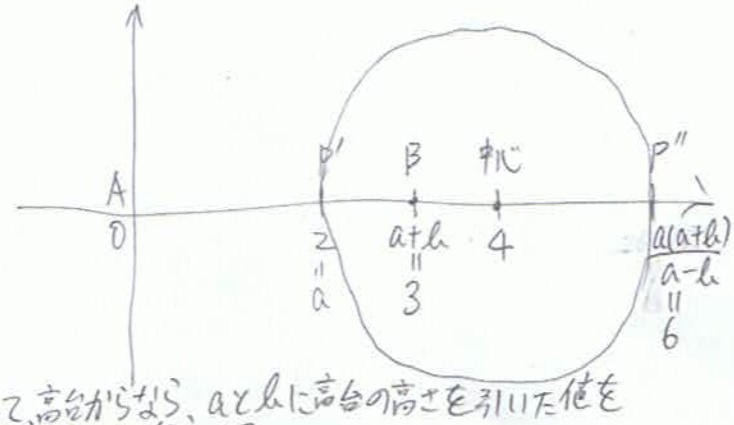
中心が
$$\left(\frac{a^2}{a-b},0\right)=\left(\frac{600^2}{600-300},0\right)=\left(\frac{\cancel{360000}^{1200}}{\cancel{300}},0\right)=(1200,0)$$

半径が
$$\frac{ab}{a-b}=\frac{600\times300}{600-300}=\frac{600\times\cancel{300}}{\cancel{300}}=600$$
となり、



となり、

比率に直すと、300で全体を割れば



となり、本日のお題を証明した事になる。
従って、$a-b\neq0$すなわち、
$a\neq b$のとき、全てに
おいて円となる。

よって、高台からなら、aとbに高台の高さを引いた値を代入すれば万能となる。

また、

内分点P'の座標
$=$中心 $-$ 半径
$$=\frac{a^2}{a-b}-\frac{ab}{a-b}$$
$$=\frac{a^2-ab}{a-b}$$
$$=\frac{a\cancel{(a-b)}}{\cancel{a-b}}$$
$$=a$$

外分点P''の座標
$=$中心 $+$ 半径
$$=\frac{a^2}{a-b}+\frac{ab}{a-b}$$
$$=\frac{a^2+ab}{a-b}$$
$$=\frac{a(a+b)}{a-b}$$

となり、P'とP''も内分、外分の座標と一致するので、P'P''を直径とする円になる。